

Universitäts- und Landesbibliothek Bonn

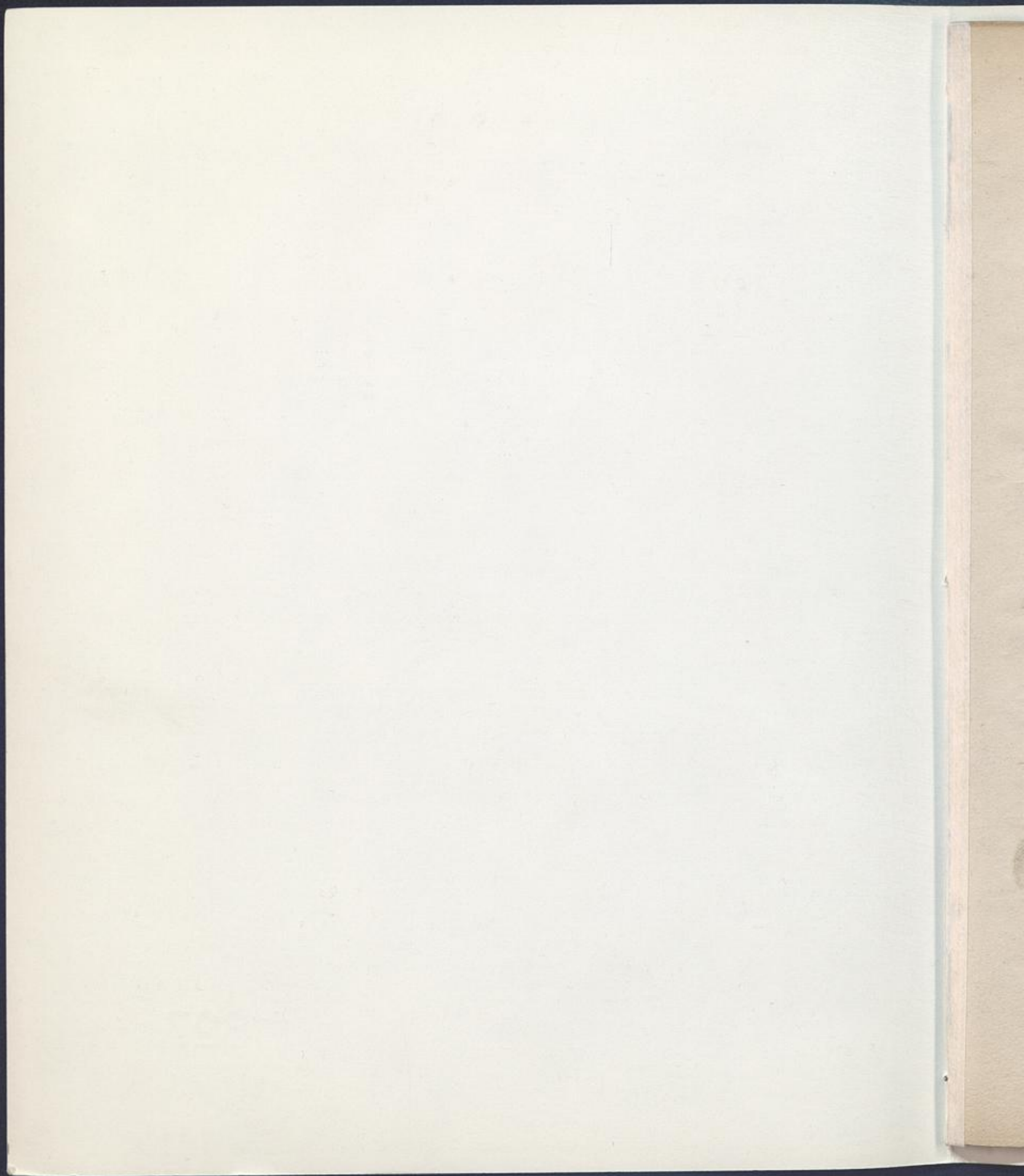
**Behandlung einiger Fälle der Aufgabe über die
Berührungen**

Zirkel, Josef Peter

Bonn, 1827

urn:nbn:de:hbz:5:1-200023

1827



BEHANDLUNG EINIGER FÄLLE
DER AUFGABE
ÜBER DIE BERÜHRUNGEN

VON

P. J. Z I R K E L.

Wissenschaftliche Abhandlung zum Programm der diesjährigen Herbstprüfungen
am Gymnasium zu Bonn.

Bonn, 1827.

gedruckt bei P. Neusser, am Hof, Nro. 41.

BEHANDLUNG EINIGER FÄLLE
DER AUFGABE
ÜBER DIE BERÜHRUNGEN

P. U. N I R K E L

Wissenschaftliche Abhandlung zum Programm der diesjährigen Herbstprüfungen
am Gymnasium zu Bonn

Bonn, 1897.
Gedruckt bei P. Neuen, am Hof No. 41.

von mehreren Seiten betrachtet, und nach verschiedenen un-
 bekannten Größen, von welchen die Auflösung abhängt, mit den bekannten
 in Beziehung gebracht, so daß jede Aufgabe mehrere Seiten zur Auflösung
 darbietet. Wenn jedoch bei der Behandlung der vorliegenden Aufgabe die
 Resultate, die sich durch Anwendung von Hülfssätzen auf einfachere Weise
 finden lassen, auf eine etwas verwickeltere Art gefunden sind, so geschah
 dies, weil als Grundsatz vorgehalten wurde, daß bei der Behandlung
 Methode alle Hülfssätze vermieden werden sollten.

V o r w o r t.

Die folgenden Blätter haben den Zweck: den Schülern der obern Klassen des Gymnasiums eine Anleitung zu geben zur Auflösung der berühmten Aufgabe des Apollonius von Perga über die Berührungen, sowohl auf rein geometrischem, als analytischem Wege. Es konnten natürlich hier nur einzelne Fälle dieser Aufgabe bearbeitet werden, welche die jedesmalige Figur angiebt. Die Bearbeitung derselben könnte den Schülern Veranlassung und Leitfaden zu der Behandlung verwandter Fälle werden. Eine vollständige Uebersicht des Problems hat Vieth in seinem Leitfaden mitgetheilt. Die analytischen Auflösungen insbesondere mögen den Schülern als Beispiel dienen, wie sie, nachdem sie sich mit den Formen der Trigonometrie gehörig bekannt gemacht, dieselben nun bei der Auflösung ähnlicher Aufgaben in Anwendung bringen, und sich im Gebrauche derselben Uebung verschaffen können. Wird gewöhnlich bei der trigonometrischen Behandlung geometrischer Aufgaben als unbekannte Gröfse diejenige ausgewählt, welche nach dem Ueberblick die einfachste Beziehung zwischen den bekannten Gröfsen darstellt, was meistens der Fall seyn wird, wenn die zu suchende Gröfse mit den gegebenen in irgend einem symmetrischen Verhältnisse steht, so wurden hier die Aufgaben

IV

von mehreren Seiten betrachtet, und nach und nach verschiedene unbekannte Gröfsen, von welchen die Auflösung abhing, mit den bekannten in Beziehung gebracht, so dafs jede Aufgabe mehrere Seiten zur Auflösung darbietet. Wenn jedoch bei der Behandlung der vorliegenden Aufgabe die Resultate, die sich durch Anwendung von Hülfslinien auf einfachere Weise finden liessen, auf eine etwas weitläufige Art gefunden sind, so geschah dies, weil als Grundsatz festgehalten wurde, dafs bei der rechnenden Methode alle Hülfsconstructions vermieden werden sollten.

V O R W O R T

Die folgenden Blätter haben den Zweck: den Schülern der oberen Klassen des Gymnasiums eine Anleitung zu geben zur Auflösung der bestimmten Aufgabe des Apollonius von Perga über die Berührungen, sowohl auf rein geometrischem, als analytischem Wege. Es konnten natürlich nur nur einzelne Fälle dieser Aufgabe bearbeitet werden, welche die jehermässige Figur angibt. Die Bearbeitung dergleichen könnte den Schülern Veranlassung und Leitfaden zu der Behandlung verwandter Fälle werden. Eine vollständige Lehrweise des Problems hat sich in seinem Leitfaden nicht gezeigt. Die analytischen Aufösungen insbesondere mögen den Schülern als Beispiel dienen, wie sie, nachdem sie sich mit den Formeln der Trigonometrie gehörig bekannt gemacht, dieselben nun bei der Auflösung ähnlicher Aufgaben in Anwendung bringen, und sich im Gebrauche derselben Übung verschaffen können. Wird gewöhnlich bei der trigonometrischen Behandlung geometrischer Aufgaben als unbekanntes Gegebenes angegeben, welche nach dem Gebräuche der elementaren Theorie durch Anwendung der bekannten Gröfsen daraus was meistens der Fall sein wird, wenn die zu suchende Gröfse mit zwei gegebenen in irgend einem geometrischen Verhältnisse steht, so werden hier die Aufgaben

Aufgabe 1. (Fig. 1.)

Es seyen die drei Punkte a, b, c gegeben; durch diese einen Kreis zu legen.

Analysis.

Da der gesuchte Kreis durch die drei Punkte a, b, c gehen soll, so werden ab und ac Sehnen desselben. Sein Mittelpunkt liegt also sowohl auf dem in der Mitte von ab über ab als auf dem in der Mitte von ac über ac errichteten Perpendikel, mithin im Durchschnitte beider.

Determination.

Die drei gegebenen Punkte dürfen nicht in einer geraden Linie liegen.

Construction. (Fig. 2.)

In der Mitte der ab und ac errichte man über denselben die Perpendikel do und eo ; der Punkt o , in welchem diese einander schneiden, ist der Mittelpunkt des gesuchten Kreises.

Beweis.

Zieht man oa, ob und oc , so folgt aus der Congruenz der $\triangle aod$ und bod , daß $ao=bo$, und aus der Congruenz der $\triangle aoe$ und eoc , daß $oa=oc$; mithin ist $ob=oa=oc$. Der aus o mit ob beschriebene Kreis geht also durch die Punkte b, a und c .

Trigonometrische Behandlung.

Analysis 1. (Fig. 3.)

Es sey o der Mittelpunkt des gesuchten Kreises, also $oa=ob=oc$. Man ziehe ab, bc, ca , und setze

$$oba=x,$$

$$\text{also } cho=b-x,$$

$$ab=C, bc=A,$$

so ist (Diesterw. Trig. Lehrs. 14.)

$$ao^2 = bo^2 + C^2 - 2ob.C.\cos.x$$

$$\text{also } C^2 = 2bo.C.\cos.x$$

$$\text{folglich } C = 2bo.\cos.x \quad (I.)$$

$$\text{Eben so ist } A = 2bo.\cos.(b-x) \quad (II.)$$

mithin, wenn man die Gleichung (II.) durch die Gleichung (I.) dividirt,

$$\begin{aligned} \frac{A}{C} &= \frac{\cos.(b-x)}{\cos.x} \\ &= \frac{\cos.b.\cos.x + \sin.b.\sin.x}{\cos.x} \\ &= \cos.b + \sin.b.\tan.x \end{aligned}$$

$$\text{woraus } \sin.b.\tan.x = \frac{A}{C} - \cos.b$$

$$= \frac{A - \cos.b.C}{C}$$

$$\text{also } \tan.x = \frac{A - \cos.b.C}{C.\sin.b}$$

C o n s t r u c t i o n. (Fig. 4.)

Eliminirt man aus den Gleichungen

$$C.\sin.b = B.\sin.c$$

$$A = C.\cos.b + B.\cos.c$$

die Seite B, so erhält man

$$\cot.c = \frac{A - \cos.b.C}{C.\sin.b}$$

$$\text{folglich ist } \tan.c = \cot.x = \cot.(R-c)$$

$$\text{also } x = R - c.$$

Man errichte demnach im Punkte c über ac das Perpendikel ce, so ist bce=x; diesen Winkel bce trage man in b und a auf ab an, so ist der Durchschnittspunkt o der Schenkel bo und ao der Mittelpunkt des gesuchten Kreises.

B e w e i s.

$$\text{Es ist } oba = R - c$$

$$\text{und } oab = R - c$$

$$\text{also } oba + oab = 2R - 2c$$

$$\begin{aligned} \text{folglich } 2c &= 2R - (oba + oab) \\ &= boa. \end{aligned}$$

Der aus o mit ob beschriebene Kreis muß also durch den Punkt c gehen, weil bo a als Mittelpunktwinkel $= 2c$ ist.

A n a l y s i s 2. (Fig. 3.)

Man setze bo a $= x$

$$coa = y$$

$$hoc = z$$

$$hc = A, ac = B, ab = C$$

$$bo = ao = co = r,$$

so ist

$$\cos x = \frac{2r^2 - C^2}{2r^2}$$

$$= 1 - \frac{C^2}{2r^2}$$

$$\text{also } \frac{C^2}{2r^2} = 1 - \cos x$$

$$= 2 \sin^2 \frac{1}{2} x$$

$$\text{folglich } \frac{C}{2r} = \sin \frac{x}{2}$$

$$\text{Eben so ist } \frac{B}{2r} = \sin \frac{y}{2}$$

$$\text{und } \frac{A}{2r} = \sin \frac{z}{2}$$

$$\text{Daher } \sin \frac{1}{2} x : \sin \frac{1}{2} y : \sin \frac{1}{2} z = \frac{C}{2r} : \frac{B}{2r} : \frac{A}{2r}$$

$$= C : B : A.$$

Da nun im $\triangle abc$

$$C : B : A = \sin c : \sin b : \sin a,$$

und diese drei Winkel c, b, a zusammen $2R$ betragen, so wie die $\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y, \frac{1}{2}z$, weil $x + y + z = 4R$, so ist $\frac{1}{2}x = c, \frac{1}{2}y = b, \frac{1}{2}z = a$. Denn bildet man ein $\triangle$ mit einer Seite B und zwei anliegenden Winkeln $\frac{1}{2}x$ und $\frac{1}{2}z$, so werden die andern Seiten gemäß der Proportion C und A seyn; und wenn man mit der Seite B und den beiden anliegenden Winkeln c und a ein $\triangle$ bildet, so sind die andern Seiten ebenfalls C und A . Dieses $\triangle$ ist demnach dem obigen congruent, und somit

$$\frac{1}{2}x = c, \frac{1}{2}y = b, \frac{1}{2}z = a.$$

C o n s t r u c t i o n. (Fig. 5.)

In c trage man an ac den Winkel ach an, mache $ce = cb$, und ziehe be ; so ist das $\triangle bce$ gleichschenkelig. Da nun das $\triangle$, worin der Winkel x , der $= bce$, auch

ein gleichschenkliches ist, so muß es mit jenem gleichwinklich seyn. Man trage daher in a und b an ba den Winkel $e=ebc$ an, so ist der Durchschnittspunkt o der Schenkel ao und bo des gesuchten Kreises Mittelpunkt.

B e w e i s.

$$boa=bce=2bca.$$

A n a l y s i s 3. (Fig. 2.)

Es sey $abo=y$

$$bo=ao=co=r$$

$$ab=C, bc=A, ac=B$$

so ist

$$\cos.y=\frac{C}{2r}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{eben so } \cos.(b-y) \\ \cos.b.\cos.y+\sin.b.\sin.y \end{array} \right\} = \frac{A}{2r}.$$

$$\begin{aligned} \text{Da nun } \sin.y &= \sqrt{1 - \frac{C^2}{4r^2}} \\ &= \sqrt{\frac{4r^2 - C^2}{4r^2}}, \end{aligned}$$

$$\text{so ist } \frac{A}{2r} = \frac{\cos.b.C}{2r} + \frac{\sin.b.\sqrt{4r^2 - C^2}}{2r}$$

$$\text{also } A = \cos.b.C + \sin.b.\sqrt{4r^2 - C^2}$$

$$\text{mithin } \sin.b.\sqrt{4r^2 - C^2} = A - \cos.b.C$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{daher } \sin^2.b(4r^2 - C^2) \\ 4\sin^2.b.r^2 - \sin^2.b.C^2 \end{array} \right\} = A^2 + \cos^2.b.C^2 - 2A.C.\cos.b$$

$$\begin{aligned} \text{also } 4\sin^2.b.r^2 &= A^2 + C^2(\sin^2.b + \cos^2.b) - 2A.C.\cos.b \\ &= A^2 + C^2 - 2A.C.\cos.b \\ &= B^2 \end{aligned}$$

$$\text{folglich } 2\sin.b.r = B$$

$$\text{und somit } r = \frac{B}{2\sin.b}$$

$$= \frac{B}{2\sin.b}$$

C o n s t r u c t i o n. (Fig. 6.)

In der Mitte der ac errichte man über derselben das Perpendikel dm , und ziehe von a aus nach diesem Perpendikel eine Linie ao , so daß $aod=b$; so ist der Durchschnittspunkt o der Mittelpunkt des gesuchten Kreises.

B e w e i s.

Zieht man co , so ist $co=ao$ und $doc=doa$, folglich $aoc=2b$. Der aus o mit oa oder oc beschriebene Kreis geht also auch durch den Punkt b .

A u f g a b e 2. (Fig. 7.)

Es sind zwei Punkte a, b und eine gerade Linie cd gegeben; man soll einen Kreis beschreiben, welcher durch die Punkte a und b gehe, und die cd berühre.

A n a l y s i s 1.

Man stelle sich vor, daß der Kreis um den Mittelpunkt o den Forderungen der Aufgabe genüge. Verlängert man ab bis zum Durchschnitt mit cd in g , so ist

$$ge^2 = gb \cdot ga.$$

Da nun das Rechteck $gb \cdot ga$ bekannt ist, so ist auch ge^2 , mithin der Punkt e gegeben, somit der Kreis selbst, indem man drei Punkte desselben kennt.

C o n s t r u c t i o n. (Fig. 8.)

Man verlängere ab bis zum Durchschnittspunkt g mit der cd , beschreibe, um die mittlere Proportionallinie zwischen gb und ga zu erhalten, über ag einen Halbkreis, errichte auf ag in b das Perpendikel bh , bis zu seinem Durchschnittspunkt h mit der Peripherie, ziehe hg , und mache $ge=gh$; so ist e der Berührungspunkt in cd , und der durch a, b und e gelegte Kreis der verlangte.

B e w e i s.

$$\left. \begin{array}{l} gh^2 \\ eg^2 \end{array} \right\} = gb \cdot ga.$$

Also berührt die cd den Kreis bae .

Z u s a t z.

Es erhellet von selbst, daß es zwei Kreise mit der verlangten Eigenschaft giebt.

A n a l y s i s 2. (Fig. 9.)

Da ab Sehne des gesuchten Kreises wird, so liegt der Mittelpunkt desselben in dem in der Mitte von ab über derselben errichteten Perpendikel hg . Die vorliegende Aufgabe reducirt sich demnach auf folgende: Von dem Punkte b nach einem Punkte der Linie hg eine Linie zu ziehen, die dem von diesem Punkte auf die cd gefällten Perpendikel gleich ist.

C o n s t r u c t i o n. (Fig. 10.)

In einem beliebigen Punkte m der cd errichte man über cd ein Perpendikel, und verlängere dasselbe bis zum Durchschnittspunkte i mit dem in der Mitte von ab über ab errichteten Perpendikel hg; man ziehe bg und beschreibe aus i mit im einen Kreis, welcher die bg in den Punkten p und p' schneidet; man ziehe ip und ip', und durch b Parallelen mit ip und ip', welche die gh in o und o' durchschneiden, so ist sowohl o, als o' Mittelpunkt des Kreises, welcher der Aufgabe Genüge leistet.

B e w e i s.

Man falle von o das Perpendikel oq auf cd, so ist

$$\text{im} \# \text{oq}$$

$$\text{also im: oq} = \text{ig: og}$$

$$\text{ferner ip} \# \text{bo}$$

$$\text{also ip: bo} = \text{ig: og}$$

$$\text{mithin im: oq} = \text{ip: bo}$$

$$\text{folglich oq} = \text{bo.}$$

Also berührt der aus o mit ob=oa beschriebene Kreis die cd in q. — Der Beweis für den zweiten Kreis ist buchstäblich derselbe.

Trigonometrische Behandlung.

A n a l y s i s 1. (Fig. 11.)

Es sey $oa=ob=oe=r$; ferner, wenn man ab bis zum Durchschnitt mit cd in g verlängert

$$ga=m, \quad gb=n$$

$$\text{also } ba=m-n;$$

ge werde $=x$ gesetzt, so ist, wenn go gezogen wird:

$$\left. \begin{array}{l} \text{og}^2 \\ r^2+x^2 \end{array} \right\} = r^2+m^2-2mr.\cos.a.$$

Nun ist aber im $\triangle abo$

$$\cos.a = \frac{(m-n)^2}{2(m-n)r} = \frac{m-n}{2r}$$

— 7 —

$$\text{folglich } r^2 + x^2 = r^2 + m^2 - \frac{2mr(m-n)}{2r} \\ = r^2 + m^2 - m(m-n)$$

$$\text{daher } x^2 = m^2 - m(m-n) \\ = mn.$$

Diese Analysis führt also wieder auf die erste geometrische Auflösung zurück.

A n a l y s i s 2. (Fig. 12.)

Der Mittelpunkt o des gesuchten Kreises muß auf dem in der Mitte m von ab über ab errichteten Perpendikel me liegen.

Nun sey ob=oa=oi=x

me=a, ab=b,

so ist, da $oe = \frac{x}{\sin.e}$,

$$\left. \begin{array}{l} me - oe \\ mo \end{array} \right\} = a - \frac{x}{\sin.e}$$

$$\text{demnach } \left. \begin{array}{l} mo^2 \\ x^2 - \frac{1}{4}b^2 \end{array} \right\} = \left(a - \frac{x}{\sin.e} \right)^2 \\ = a^2 - \frac{2ax}{\sin.e} + \frac{x^2}{\sin^2.e}$$

$$\text{folglich } a^2 + \frac{1}{4}b^2 = \frac{2ax}{\sin.e} + x^2 \left(1 - \frac{1}{\sin^2.e} \right) \\ = \frac{2ax}{\sin.e} - x^2 \frac{\cos^2.e}{\sin^2.e} \\ = 2ax \frac{\cot.e}{\cos.e} - x^2 \cot^2.e \\ = x \cot.e \left(\frac{2a}{\cos.e} - x \cot.e \right).$$

Zieht man nun ae, so ist

$$ae^2 = a^2 + \frac{1}{4}b^2.$$

Daher kann man die obige Gleichung in folgende Proportion verwandeln:

$$ae : x \cot.e = \frac{2a}{\cos.e} - x \cot.e : ae,$$

von welcher man die beiden äußern Glieder, so wie die Summe der beiden mittleren, nämlich $\frac{2a}{\cos.e}$ kennt. Folglich kann man auch $x \cot.e$ finden, und somit x selbst.

C o n s t r u c t i o n. (Fig. 13.)

Verlängert man die Linie ab bis zum Durchschnitt mit cd in g, so ist

$$ge = \frac{a}{\cos, e}$$

$$\text{also } ae : x \cdot \cot, e = 2ge - x \cdot \cot, e : ae$$

Man beschreibe aus g mit ge einen Halbkreis, so ist he = 2ge. Das Quadrat von ae hat man demnach in ein Rechteck zu verwandeln, dessen Seiten-Summe eh ist. Zu diesem Behufe errichte man in e über eh das Perpendikel en=ea, und ziehe durch n die ni⊥eh, welche den über he beschriebenen Halbkreis in den Punkten i und i' schneidet (ein Schneiden muß jedesmal Statt finden, weil en=ea=eb⊥eg ist). Man falle von diesen Punkten i und i' auf cd die Perpendikel ip und ip', welche die en in den Punkten o und o' durchschneiden, so sind o und o' die Mittelpunkte von Kreisen, welche den Forderungen der Aufgabe genügen.

B e w e i s.

Es ist ae : ep = eh - ep : ae

$$\text{also } ep = x \cdot \cot, e$$

$$\text{mithin } x = \frac{ep}{\cot, e}$$

Nun ist aber auch

$$op = \frac{ep}{\cot, e}$$

folglich x = op

Der aus o mit ob=oa beschriebene Kreis berührt also die cd in p. Der Beweis für den zweiten Kreis ist derselbe.

Z u s a t z.

Geometrische Nachweisung.

Es ist

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} ea^2 \\ am^2 + me^2 \end{aligned} \right\} &= hp \cdot pe \\ &= (eg + gp)(eg - gp) \\ &= eg^2 - gp^2 \\ &= em^2 + mg^2 - gp^2 \end{aligned}$$

$$\text{also } am^2 = mg^2 - gp^2.$$

Zieht man go, so ist

$$\begin{aligned} gm^2 + mo^2 &= go^2 \\ &= gp^2 + op^2 \end{aligned}$$

— 9 —

$$\text{daher } \frac{gm^2 - gp^2}{am^2} \} = po^2 - mo^2$$

$$\text{mithin } po^2 = am^2 + mo^2 \\ = ao^2$$

folglich $po = ao$.

A n a l y s i s 3. (Fig. 14.)

Es sey $aco = x$,

also $oce = c - x$;

$ao = ob = oe = r$,

so ist $co = \frac{r}{\sin.(c-x)}$.

Im $\triangle aco$ ist

$$\frac{ao^2}{r^2} \} = ac^2 + \frac{r^2}{\sin^2(c-x)} - \frac{2ac.r.\cos.x}{\sin.(c-x)} \quad (I.)$$

und im $\triangle boc$

$$\frac{bo^2}{r^2} \} = bc^2 + \frac{r^2}{\sin^2(c-x)} - \frac{2bc.r.\cos.x}{\sin.(c-x)}$$

$$\text{folglich } ac^2 - bc^2 = \frac{2(ac-bc).r.\cos.x}{\sin.(c-x)}$$

$$\text{mithin } r = \frac{(ac+bc).\sin.(c-x)}{2.\cos.x}$$

Nun folgt aber aus der Gl. (I.), dafs

$$\frac{2ac.r.\cos.x}{\sin.(c-x)} - ac^2 = \frac{r^2}{\sin^2(c-x)} - r^2 \\ = \frac{r^2.\cos^2(c-x)}{\sin^2(c-x)};$$

daher ist, wenn man statt r den oben gefundenen Werth in dieser Gleichung substituirt:

$$\frac{ac(ac+bc) - ac^2}{ac.bc} \} = \frac{(ac+bc)^2.\cos^2.(c-x)}{4\cos^2.x}$$

$$\text{mithin } \cos^2.(c-x) = \frac{4ac.bc.\cos^2.x}{(ac+bc)^2}$$

$$\text{also } \frac{\cos.(c-x)}{\cos.c.\cos.x + \sin.c.\sin.x} \left. \vphantom{\frac{\cos.(c-x)}{\cos.c.\cos.x + \sin.c.\sin.x}} \right\} = \frac{+2\sqrt{ac.bc.\cos.x}}{ac+bc}$$

$$\text{folglich } \sin.c.\sin.x = \frac{+2\sqrt{ac.bc.-(ac+bc).\cos.c}.\cos.x}{ac+bc}$$

$$\text{somit } \tan.x = \frac{+2\sqrt{ac.bc.-(ac+bc).\cos.c}}{(ac+bc).\sin.c}$$

Diese Formel ist eine bekannte Formel der Cotangente eines Winkels in einem Dreieck: wo die beiden Linien zwei Seiten sind, die den bekannten Winkel einschließen. Der dem Minuend des Zählers gegenüberstehende Winkel ist derjenige, dessen Cotangente gesucht wird.

C o n s t r u c t i o n. (Fig. 15.)

Man verlängere ca, und mache $ae=bc$, so daß $ce=ac+bc$. Dann suche man, um $\sqrt{ac.bc}$ zu erhalten, die mittlere Proportionallinie zwischen cb und ca, und lege diese, cd, auf cd; man mache $dg=cd$, so ist, wenn man noch eg zieht:

$$\left. \begin{array}{l} \cot.g \\ \tan.(R-g) \end{array} \right\} = \frac{eg - ce.\cos.c}{ce.\sin.c} = \tan.x$$

mithin $R-g=x$.

Man trage nun diesen Winkel in c auf ca an, welches füglich auf folgende Weise geschieht. In d über eg errichte man die do, so wie in h, der Mitte von ab, über ab die ho perpendicular, welche sich in o schneiden. Zieht man nun noch oc, so ist

$$hco=R-g;$$

denn o ist der Mittelpunkt des Kreises, welcher durch die Punkte c, e, g geht;

$$\text{mithin } g = \frac{1}{2}coe = coh.$$

$$\text{Nun ist } hco=R-coh$$

$$\text{folglich } hco=R-g.$$

Nun ist aber auch o der Mittelpunkt des gesuchten Kreises.

B e w e i s.

Legt man durch die drei Punkte b, d, a einen Kreis, so berührt dieser die eg in d, weil $cb.ca=cd^2$.

Den zweiten Kreis erhält man aus der Construction der andern Formel für

$$\tan.x = \frac{-2\sqrt{ac.bc.-(ac+bc).\cos.c}}{(ac+bc).\sin.c},$$

$$\text{oder } -\tan.x = \frac{2\sqrt{ac.bc} + (ac+bc).\cos.c}{ac+bc).\sin.c}.$$

Man lege $cg' = 2\sqrt{ac.bc}$ auf die Verlängerung des Schenkels des W. c, und ziehe $g'e$, so ist:

$$\left. \begin{array}{l} \cot.eg'c \\ \tan.(R-g') \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{cg'+ce.\cos.c}{ce.\sin.c} \\ -\tan.x \end{array} \right.$$

$$\text{somit } R-g' = 4R-x.$$

Verbindet man nun den Mittelpunkt o' des durch e, c, g' gehenden Kreises mit c, so wird

$$g' = \frac{1}{2}co'e = co'h,$$

$$\text{also } R-g' = o'cb,$$

$$\text{daher } o'cb = 4R-x$$

$$\text{mithin } x = 4R - o'cb.$$

Wenn man daher an ac den W. $4R - o'cb$ legt, und zwar nach derselben Richtung hin, wo der W. x der ersten Lösung gezählt wurde, so wird der andere Schenkel des W. x offenbar auf die Linie co' fallen, indem der erhabene W. $o'cb$ dem W. x gleich ist. Der Mittelpunkt des gesuchten Kreises liegt also im Punkte o' .

Aufgabe 3. (Fig. 16.)

Es sind zwei Punkte a, b und ein Kreis zum Mittelpunkt c gegeben; man soll einen Kreis construiren, welcher durch a und b gehe, und den Kreis um c berühre.

A n a l y s i s 1.

Man nehme an, der Kreis um o sey der verlangte, welcher durch a und b gehe, und den gegebenen um c in h berühre, so haben beide Kreise in dem Berührungspunkte h eine gemeinschaftliche Tangente. Denkt man sich diese bis zum Durchschnitt g mit der verlängerten ba gezogen, so ist:

$$gh^2 = gb.ga;$$

und denkt man sich noch durch g und einen beliebigen Punkt e in der Peripherie des gegebenen Kreises um c eine gerade Linie gezogen, welche diese Peripherie noch in einem zweiten Punkte d schneidet, (s. unten die Anmerkung) so ist auch

$$gh^2 = ge.gd$$

$$\text{mithin } gb.ga = ge.gd;$$

folglich liegen die vier Punkte a, b, e, d auf der Peripherie eines Kreises. Nimmt man also in der Peripherie des gegebenen Kreises einen Punkt e willkürlich an,

und legt durch a, b, e einen Kreis, welcher jenen noch in einem zweiten Punkte d schneidet, so bestimmen die verlängerten Sehnen ba und ed bei ihrem Durchschnitt den Punkt g , aus welchem die Tangente an den gegebenen Kreis, diesen in demjenigen Punkte trifft, welcher der Berührungspunkt des gegebenen Kreises mit dem verlangten wird.

C o n s t r u c t i o n. (Fig. 16.)

Man nehme den Punkt e in der Peripherie des gegebenen Kreises beliebig an, lege durch a, b und e einen Kreis, welcher jenen noch in einem zweiten Punkte d schneidet, ziehe ba und ed , verlängere diese bis zu ihrem Durchschnitt in g , und ziehe von g an den gegebenen Kreis die Tangenten gh, gh' , so ist sowohl der durch a, b und h , als auch der durch a, b und h' gelegte Kreis der verlangte.

B e w e i s.

Es ist $ge \cdot gd = gb \cdot ga$.

Nun ist aber $ge \cdot gd = gh^2$

folglich $gb \cdot ga = gh^2$.

Es ist also auch gh Tangente des Kreises durch a, b, h . Beide Kreise haben demnach in h eine gemeinschaftliche Tangente, d. i. sie berühren sich in h . Der Beweis für den andern Kreis ist der nämliche.

Anmerkung. Hat man den Punkt e zufällig so gewählt, daß der durch a, b und e gelegte Kreis den gegebenen berührt, so ist er selbst der eine verlangte. Sollte aber e so angenommen seyn, daß $ed \nparallel ab$ wird, so bestimmt die auf der Mitte von ed oder ab errichtete Senkrechte in ihren Durchschnittspunkten mit der Peripherie des gegebenen Kreises die gesuchten Berührungspunkte h und h' .

A n a l y s i s 2. (Fig. 17.)

Gesetzt der Kreis um m sey der verlangte, h der Berührungspunkt mit dem gegebenen. Zieht man ah, bh , verlängert dieselben, bis sie die Peripherie des geg. Kreises in f und e treffen, und verbindet man e mit f durch eine gerade Linie, so ist $ef \parallel ab$. Denn der Winkel $b = gha = ihf = e$, wenn gi die Tangente beider Kreise in h ist. Die Aufgabe ist demnach auf folgende reducirt: Einen Punkt h auf der Peripherie des Kreises um e zu finden, so daß, wenn man ah und bh zieht, diese bis zum Durchschnitt mit der Peripherie in f und e verlängert, und ef zieht, diese der ab parallel ist. Die Auflösung dieser Aufgabe ergiebt sich aber leicht durch folgende Betrachtung. Denkt man sich nämlich in f an den geg. Kreis eine Tangente gezogen, und diese bis zum Durchschnitt mit der ab in d verlängert, so ist

$$afd = e = b;$$

Da nun auch $a=a$

so ist $\triangle afd \sim \triangle ahb$

also $ab:ah=af:ad$.

Von dieser Proportion kennt man das erste Glied und das Rechteck der beiden mittleren Glieder (es ist ein constantes); folglich ist ad , daher der Punkt d , also die Lage der Tangente df , der Punkt f , somit auch der Punkt h gegeben.

C o n s t r u c t i o n. (Fig. 18.)

Von a aus ziehe man die am durch den Kreis, welche die Peripherie desselben in den beiden Punkten m und n schneidet; man lege durch die drei Punkte n , m und b einen Kreis, welcher die durch ab gezogene Linie in d durchschneidet; alsdann ziehe man aus d Tangenten df , df' an den geg. Kreis, und von a nach f und durch f' gerade Linien, welche dem geg. Kreise in h und h' begegnen, so wird sowohl der durch a , b und h , als auch der durch a , b und h' gelegte Kreis den Forderungen der Aufgabe genügen.

Der Beweis ergibt sich sehr leicht aus der vorangehenden Untersuchung. Den Punkt h kann man übrigens noch auf eine andere Art finden, wie die folgende Betrachtung lehrt.

A n a l y s i s 3. (Fig. 19.)

Wenn wiederum $ef \parallel ab$ ist,

so ist $ah:af=bh:be$

also auch $ah^2:ah.af=bh^2:bh.be$.

Zieht man aber von a und b Tangenten ad und bg an den geg. Kreis, so ist

$$ad^2=ah.af$$

$$\text{und } bg^2=bh.be$$

$$\text{daher } ah^2:ad^2=bh^2:bg^2$$

$$\text{mithin } ah:ad=bh:bg$$

$$\text{oder } ah:bh=ad:bg.$$

Die Aufgabe ist demnach auf folgende reducirt: In der Peripherie des gegebenen Kreises einen Punkt h zu finden, so dafs die von a und b nach ihm gezogenen Linien sich wie die Tangenten ad und bg verhalten.

Es laßt sich aber sehr leicht ein Kreis beschreiben, dessen Punkte die Eigenschaft haben, dafs die von a und b nach ihnen gezogenen Linien immer dasselbe Verhältnifs, hier das der Tangenten haben. Die Durchschnittspunkte desselben mit dem gegebenen Kreise geben die gesuchten Berührungspunkte h und h' .

Trigonometrische Auflösung.

A n a l y s i s. (Fig. 20.)

Es seyen m und n die beiden gegebenen Punkte, o der Mittelpunkt des gegebenen, p der des gesuchten Kreises. Man ziehe po, welche den Kreis um o in q schneidet, und pm, pn, so erfordert die Lösung der Aufgabe, dafs $pm=pn=pq$.

Man bezeichne

$$pm=pn=pq \text{ mit } \rho$$

$$oq \text{ mit } r$$

$$omn \text{ mit } \gamma$$

$$pmn \text{ mit } x$$

$$om \text{ mit } a, mn \text{ mit } b.$$

Im $\triangle omp$ ist nun

$$\left. \begin{aligned} po^2 &= mo^2 + mp^2 - 2mo \cdot mp \cdot \cos omp \\ (oq + pq)^2 &= \left\{ \begin{aligned} &a^2 + \rho^2 - 2a\rho \cdot \cos(\gamma - x). \\ &r^2 + \rho^2 + 2r\rho \end{aligned} \right. \end{aligned} \right\}$$

$$\text{Daher} \quad r^2 + 2r\rho = a^2 - 2a\rho \cdot \cos(\gamma - x); \quad (I.)$$

ferner ist im $\triangle pmn$

$$\left. \begin{aligned} pn^2 &= mn^2 + pm^2 - 2mn \cdot pm \cdot \cos pmn \\ \rho^2 &= \left\{ \begin{aligned} &b^2 + \rho^2 - 2b \cdot \rho \cdot \cos x \end{aligned} \right. \end{aligned} \right\}$$

$$\text{daher } 2b \cdot \rho \cdot \cos x = b^2$$

$$\text{also } \rho = \frac{b}{2 \cos x}.$$

Diesen Werth von ρ in der obigen Gleichung (I.) substituirt, giebt

$$r^2 + \frac{r \cdot b}{\cos x} = a^2 - \frac{a \cdot b \cdot \cos(\gamma - x)}{\cos x}$$

$$\begin{aligned} \text{mithin } r^2 \cdot \cos x + r \cdot b &= a^2 \cdot \cos x - a \cdot b \cdot \cos(\gamma - x) \\ &= a^2 \cdot \cos x - a \cdot b \cdot \cos \gamma \cdot \cos x + a \cdot b \cdot \sin \gamma \cdot \sin x \end{aligned}$$

$$\text{also } r \cdot b = (a^2 - r^2 - a \cdot b \cdot \cos \gamma) \cdot \cos x + a \cdot b \cdot \sin \gamma \cdot \sin x$$

$$\text{folglich } \frac{r \cdot b}{a^2 - r^2 - a \cdot b \cdot \cos \gamma} = \cos x - \frac{a \cdot b \cdot \sin \gamma}{a^2 - r^2 - a \cdot b \cdot \cos \gamma} \cdot \sin x.$$

Drückt man nun den Coefficienten von $\sin x$ durch $\tan \lambda$ aus, so ist

$$\begin{aligned} \frac{r.b}{a^2 - r^2 - a.b.\cos \gamma} &= \cos x - \tan \lambda \sin x \\ &= \cos x - \frac{\sin \lambda}{\cos \lambda} \sin x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{mithin } \frac{r.b.\cos \lambda}{a^2 - r^2 - a.b.\cos \gamma} &= \cos x \cos \lambda - \sin x \sin \lambda \\ &= \cos(x + \lambda). \end{aligned}$$

Folglich ist der W. x bekannt.

C o n s t r u c t i o n. (Fig. 21.)

Zuvörderst muß der Winkel λ bestimmt werden.

Vermöge der Analysis ist

$$\begin{aligned} \tan \lambda &= \frac{a.b.\sin \gamma}{a^2 - r^2 - a.b.\cos \gamma} \\ &= \frac{a.\sin \gamma}{\frac{a^2 - r^2}{b} - a.\cos \gamma} \end{aligned}$$

Verlängert man nun die Linie mo bis zum Durchschnitt mit dem Kreise in d , so ist

$$a^2 - r^2 = (a + r)(a - r) = md.mc;$$

und legt man durch die drei Punkte d , c und n einen Kreis, welcher die mn in e schneidet, so ist

$$\begin{aligned} me &= \frac{mc.md}{mn} \\ &= \frac{a^2 - r^2}{b} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{also } \tan \lambda &= \frac{a.\sin \gamma}{me - a.\cos \gamma} \\ &= \frac{om.\sin.cmn}{me - mo.\cos.cmn} \end{aligned}$$

Man fälle von o auf mn das Perpendikel og , so ist

$$og = om.\sin.cmn;$$

$$\text{ferner } mg = om.\cos.cmn$$

$$\begin{aligned} \text{also } me - mg &= me - om.\cos.cmn. \\ ge &\} \end{aligned}$$

$$\text{Daher } \tan.\lambda = \frac{og}{ge} \\ = \tan.oeg,$$

wenn man oe zieht;

$$\text{also } oeg = \lambda$$

$$\text{folglich } \cos.(x+oeg) = \frac{r.b.\cos.oeg}{a^2 - r^2 - a.b.\cos.y} \\ = \frac{r.\cos.oeg}{\frac{a^2 - r^2}{b} - \cos.oeg} \\ = \frac{r.\cos.oeg}{\frac{ge}{\cos.oeg}} \\ = \frac{r}{oe}.$$

Wenn man aber von e die Tangente eh an den Kreis um o, und oh zieht, so ist

$$\cos. hoe = \frac{oh}{oe} = \frac{r}{oe} \\ = \cos.(x+oeg)$$

$$\text{also } hoe = x + oeg$$

$$\text{mithin } x = hoe - oeg.$$

Fällt man endlich aus m das Perpendikel ms auf he, welches die oe in q schneidet, so ist hoe = sqe

$$\text{also } x = sqe - oeg \\ = qme.$$

So also ist der gesuchte Winkel gefunden. Der Mittelpunkt des verlangten Kreises liegt demnach im Durchschnittspunkte p der ms mit dem auf mn in der Mitte errichteten Perpendikel. Der aus p mit pm = pn beschriebene Kreis wird den gegebenen berühren.

B e w e i s.

Man ziehe mh, welche den Kreis um o in t schneidet, ferner to, tp, tn, pn, so ist mt.mh = mc.md

$$= mn.me.$$

Mithin liegen die vier Punkte h, t, n, e auf der Peripherie eines Kreises, also

$$hen + htn = 2R,$$

$$\text{auch ist } mtn + htn = 2R$$

$$\text{folglich } hen = mtn.$$

$$\text{Da aber } sem \} = mpr$$

$$hen \} = rpn$$

$$\text{so ist } mpn = 2hen$$

$$= 2mtn.$$

Der Punkt t ist also auch ein Punkt in der Peripherie des aus p mit pm beschriebenen Kreises;

$$\text{daher } pm = pt$$

$$\text{mithin } ptm = pmt$$

$$= oht$$

$$= hto.$$

Nun ist aber mth eine gerade Linie, folglich auch otp . Daher berührt der aus p mit pm beschriebene Kreis den gegebenen in t .

Die vorhin aufgefundene Formel bietet auch noch einen zweiten Kreis dar, welcher auf eine ganz ähnliche Weise, wie der erste gefunden wird.

$$\text{Es war nämlich } \tan \lambda = \tan \text{o}en;$$

$$\text{mithin ist } \lambda \text{ sowohl } = \text{o}en$$

$$\text{als auch } = \text{o}en - 2R.$$

Zieht man nun aus e an den gegebenen Kreis die zweite Tangente eh' , so ist

$$\cos.(x + \text{o}en - 2R) = \cos.h'oe$$

$$= \cos.(-h'oe)$$

$$\text{also } x + \text{o}en - 2R = -h'oe$$

$$\text{folglich } x = 2R - h'oe - \text{o}en.$$

Man falle aus m auf eh' das Perpendikel ms' , welches die eo in q' trifft, so ist

$$mq'e = h'oe$$

$$\text{also } x = 2R - mq'e - \text{o}en$$

$$= q'me.$$

Der Durchschnittspunkt p' der mq' mit dem auf mn in der Mitte errichteten Perpendikel ist also der Mittelpunkt des verlangten Kreises; der aus p' mit pm be-

schriebene Kreis geht durch die Punkte m und n, und wird den gegebenen berühren.

Der Gang des Beweises ist genau derselbe, wie derjenige des obigen.

A u f g a b e 4. (Fig. 22.)

Es sind zwei gerade Linien ab, ab und ein Punkt p gegeben; einen Kreis zu beschreiben, welcher durch diesen Punkt geht, und die beiden gegebenen geraden Linien berührt.

A n a l y s i s.

Da ab, ac Berührende an den zu suchenden Kreis werden sollen, so liegt der Mittelpunkt desselben auf der den Winkel bac halbirenden Linie ae. Diese ae bestimmt also die Lage des Durchmessers. Da nun der Kreis durch p gehen soll, so muß auch, wenn man von p auf ao das Perpendikel pf fällt, und um fg=pf verlängert, g ein Punkt in der Peripherie desselben werden. Somit ist die Aufgabe auf die vorige reducirt. Man braucht nämlich nur einen Kreis zu ziehen, welcher durch die beiden Punkte p und g geht und die eine der Linien ab, ac berührt: er berührt dann auch offenbar die andere.

Es erhellet von selbst, daß es wiederum zwei Kreise giebt, welche den Forderungen der Aufgabe genügen.

Trigonometrische Behandlung.

A n a l y s i s 1. (Fig. 23.)

Es sey o der Mittelpunkt des gesuchten Kreises, also op=oe=od. Man setze op=od=oe=x, bezeichne den Winkel bac mit α , den Winkel pab mit β , die ap mit q, so ist

$$ao = \frac{x}{\sin. dao}$$

$$= \frac{x}{\sin. oae}$$

$$\text{also } \sin. dao = \sin. oae$$

$$\text{mithin } oae = \frac{1}{2}\alpha$$

$$\text{daher } oa = \frac{x}{\sin. \frac{1}{2}\alpha}$$

Im $\triangle pao$ ist

$$po^2 = pa^2 + ao^2 - 2pa \cdot ao \cdot \cos. pao$$

$$\text{oder } x^2 = q^2 + \frac{x^2}{\sin^2 \frac{1}{2}\alpha} - 2q \cdot \frac{x}{\sin \frac{1}{2}\alpha} \cdot \cos. pao.$$

Drückt man nun $pao = \frac{1}{2}\alpha - \gamma$ durch γ aus, so ist also

$$x^2 = q^2 + \frac{x^2}{\sin^2 \frac{1}{2}\alpha} - 2q \cdot \frac{x}{\sin \frac{1}{2}\alpha} \cdot \cos. \gamma$$

$$\text{mithin } q^2 = x^2 - \frac{x^2}{\sin^2 \frac{1}{2}\alpha} + \frac{2q \cdot x \cdot \cos. \gamma}{\sin \frac{1}{2}\alpha}$$

$$= \frac{2q \cdot x \cdot \cos. \gamma}{\sin \frac{1}{2}\alpha} - \frac{x^2 \cdot \cos^2 \frac{1}{2}\alpha}{\sin^2 \frac{1}{2}\alpha}$$

$$= x \left(\frac{2q \cdot \cos. \gamma}{\sin \frac{1}{2}\alpha} - \frac{x \cdot \cos^2 \frac{1}{2}\alpha}{\sin^2 \frac{1}{2}\alpha} \right)$$

$$\text{folglich } q : x = \frac{2q \cdot \cos. \gamma}{\sin \frac{1}{2}\alpha} - \frac{x \cdot \cos^2 \frac{1}{2}\alpha}{\sin^2 \frac{1}{2}\alpha} : q.$$

Multipliziert man in dieser Proportion das eine mittlere Glied mit $\frac{\cos \frac{1}{2}\alpha}{\sin \frac{1}{2}\alpha}$ und dividirt das andere durch $\frac{\cos \frac{1}{2}\alpha}{\sin \frac{1}{2}\alpha}$, so erhält man:

$$q : \cot \frac{1}{2}\alpha \cdot x = \frac{2q \cdot \cos. \gamma}{\cos \frac{1}{2}\alpha} - \cot \frac{1}{2}\alpha \cdot x : q.$$

In dieser Proportion kennt man die Summe der beiden mittleren Glieder und die beiden äußeren; folglich sind auch alle einzelnen Glieder, somit x bekannt.

C o n s t r u c t i o n. (Fig. 24.)

Man halbiere den gegebenen Winkel α durch die ak , und fälle von p auf dieselbe das Perpendikel pf , welches verlängert die ac in g trifft, so ist

$$ag = \frac{af}{\cos \frac{1}{2}\alpha}.$$

$$\text{Da aber } af = q \cdot \cos. \gamma$$

$$\text{so ist } ag = \frac{q \cdot \cos. \gamma}{\cos \frac{1}{2}\alpha}$$

$$\text{mithin } ap : x \cdot \cot \frac{1}{2}\alpha = 2ag - \cot \frac{1}{2}\alpha \cdot x : ap.$$

Man beschreibe aus g mit ga einen Kreis, so wird $ah = 2ga$; man errichte in a auf ah das Perpendikel $ai = ap$, ziehe durch i die $im \parallel ac$, welche den aus g beschrie-

benen Kreis in m schneidet (vgl. die Anm.), und fälle von m auf ac die Senkrechte mn, welche verlängert die ak in o trifft, so ist:

$$mn : an = nh : mn$$

$$\text{oder } ap : an = 2ag - an : ap$$

$$\text{also } an = x \cdot \cot \frac{1}{2} \alpha$$

$$\text{mithin } no = x.$$

Macht man nun noch $fs = fp$,

so wird der durch n, p, s gelegte Kreis der verlangte seyn; sein Mittelpunkt ist o.

B e w e i s.

$$mn^2 = an \cdot nh$$

$$ap^2 = (ag - gn)(ag + gn) \\ = ag^2 - gn^2$$

$$\text{also } gn^2 = ag^2 - ap^2$$

$$= fg^2 + af^2 - (pf^2 + af^2)$$

$$= (fg + pf)(fg - pf)$$

$$= pg(fg - pf)$$

$$= pg \cdot (fg - fs)$$

$$= pg \cdot gs.$$

Also berührt 'gn den durch p, s und n gelegten Kreis; da aber der W. fab = fac ist, so ist auch ab eine Tangente an denselben.

Anmerkung. Eine Determination findet bei der hier angenommenen Lage des Punktes p nicht Statt, weil die Parallele im den Kreis nothwendig schneidet.

Denn $fp < fg$

$$\text{also } ap \} < ag. \\ ai \}$$

Wie man demnach den zweiten Kreis erhält, der die verlangte Eigenschaft besitzt, erhellet von selbst.

A n a l y s i s 2. (Fig. 23.)

Es sey der W. $apo = x$

$$oad = oae = \frac{1}{2} \alpha$$

$$oap = \beta$$

$$od = op = oe;$$

$$\text{so ist } oa = \frac{od}{\sin \frac{1}{2} \alpha}$$

$$\text{ferner } oa = \frac{op \cdot \sin x}{\sin \beta}$$

$$\text{mithin } \frac{od}{\sin \frac{1}{2}\alpha} = \frac{op \cdot \sin x}{\sin \beta} \\ = \frac{od \cdot \sin x}{\sin \beta}$$

$$\text{daher } \frac{1}{\sin \frac{1}{2}\alpha} = \frac{\sin x}{\sin \beta}$$

$$\text{folglich } \sin x = \frac{\sin \beta}{\sin \frac{1}{2}\alpha}$$

C o n s t r u c t i o n. (Fig. 25.)

Man ziehe durch den Punkt p die $pg \perp ak$, der Halbirungslinie des W. bac, welche die ab in g trifft, so ist

$$\begin{aligned} ap : ga &= \sin agp : \sin gpa \\ &= \sin gak : \sin pak \\ &= \sin \frac{1}{2}\alpha : \sin \beta \end{aligned}$$

$$\text{also } \frac{ga}{ap} = \frac{\sin \beta}{\sin \frac{1}{2}\alpha} = \sin x.$$

Beschreibt man nun über pa einen Halbkreis, und trägt von a aus $ah = ag$ als Sehne in denselben, so wird, wenn man hp zieht, hpa der verlangte Winkel seyn; denn

$$\sin hpa = \frac{ah}{ap} = \frac{ag}{ap} = \sin x$$

$$\text{also } hpa = x.$$

Folglich ist der Durchschnittspunkt o der hp mit der ak der Mittelpunkt des verlangten Kreises.

B e w e i s.

Man falle von o auf ab das Perpendikel od, verlängere auch die hp bis zum Durchschnitt mit ab in m, so ist

$$\begin{aligned} mo : do &= ma : ah \\ &= ma : ag \\ &= mo : po \end{aligned}$$

$$\text{folglich } do = po.$$

Also berührt der aus o mit op beschriebene Kreis die ab, so wie die ac, da $ba o = ca o$ ist.

Der Mittelpunkt des andern Kreises, welcher den Forderungen der Aufgabe entspricht, wird auf dieselbe Art gefunden. Legt man nämlich $ah' = ag$ als Sehne in den andern über ap beschriebenen Halbkreis, und zieht $h'p$, welche verlängert die ak in o' schneidet, so ist o' der gesuchte Mittelpunkt.

Z u s a t z. (Fig. 26.)

Die Formel

$$\sin. x = \frac{\sin. \beta}{\sin. \frac{1}{2} \alpha}$$

läßt sich auch noch auf eine andere Art construiren.

Fällt man von einem beliebigen Punkte m der den Winkel α halbirenden Linie ak einen Perpendikel mn auf ab, so ist

$$\sin. \frac{1}{2} \alpha = \frac{mn}{am}$$

$$\text{also } \sin. x = \frac{am \cdot \sin. \beta}{mn}$$

Beschreibt man ferner aus m mit mn einen Kreishogen, welcher die ap in q schneidet, so ist, wenn noch mq gezogen wird, in dem $\triangle amq$

$$\left. \begin{array}{l} mq \\ mn \end{array} \right\} : am = \sin. \beta : \sin. aqm$$

$$\text{mithin } \sin. aqm = \frac{am \cdot \sin. \beta}{mn} = \sin. x$$

$$\text{also } aqm = x.$$

Zieht man nun durch p die $po \parallel mq$, welche der ak in o begegnet, so ist o der Mittelpunkt des gesuchten Kreises.

B e w e i s

Man falle von o das Perpendikel og auf ab, so ist

$$mn : og = am : ao$$

$$= mq : op$$

$$\text{mithin } og = op.$$

Es ist von selbst klar, wie man den zweiten Kreis erhält.

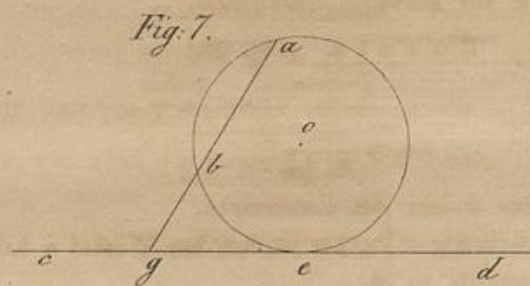
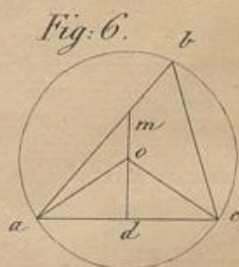
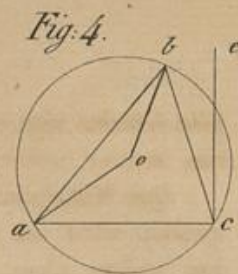
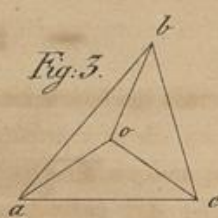
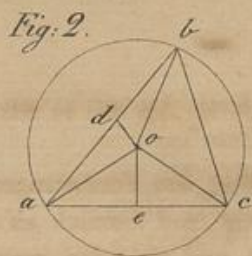
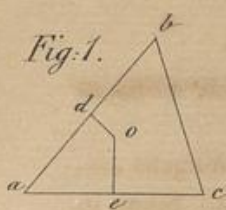


Fig. 8.

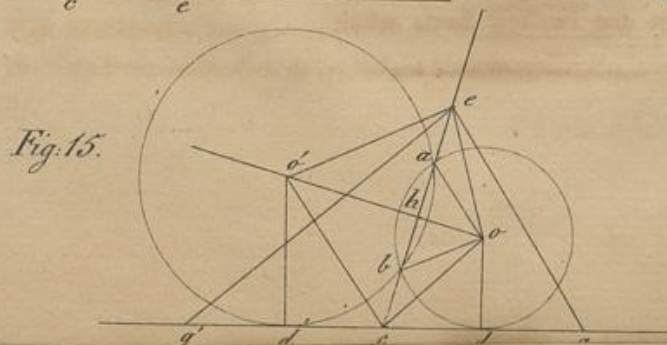
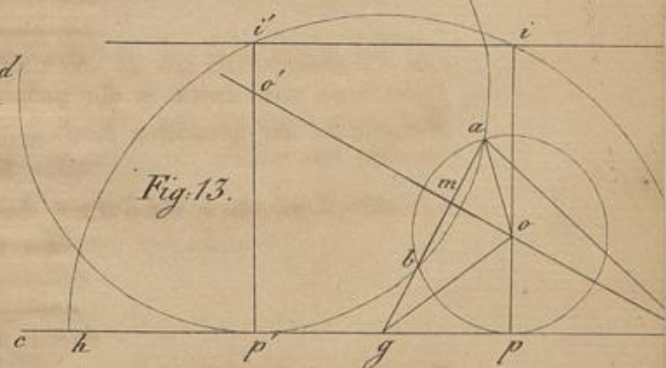
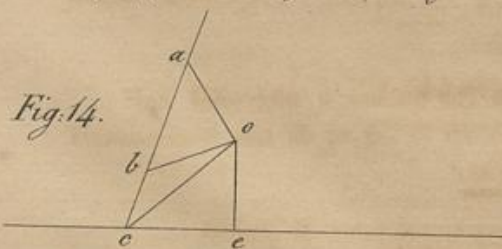
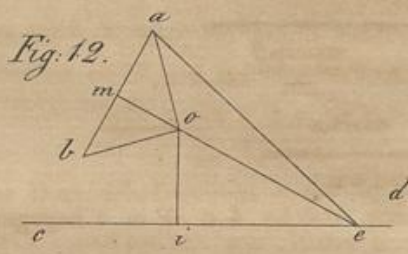
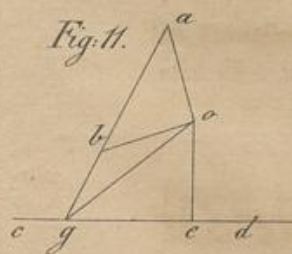
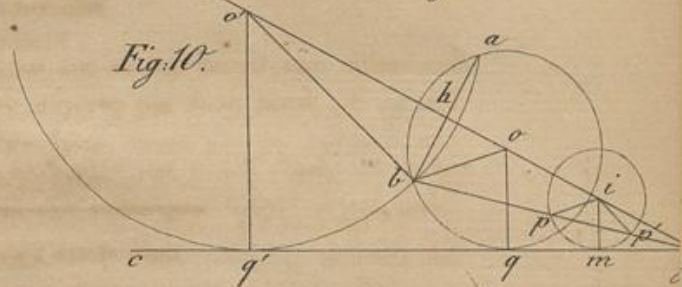
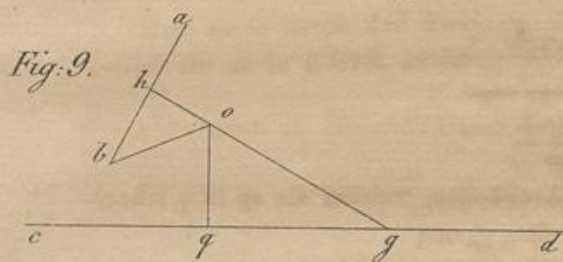
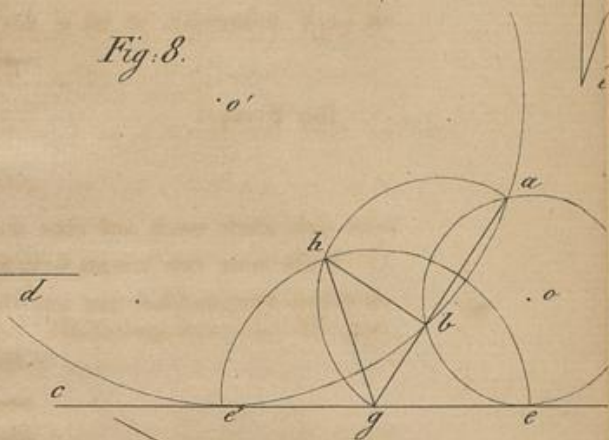
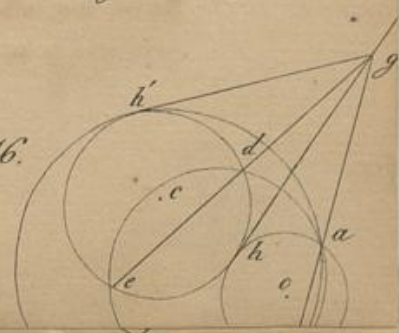
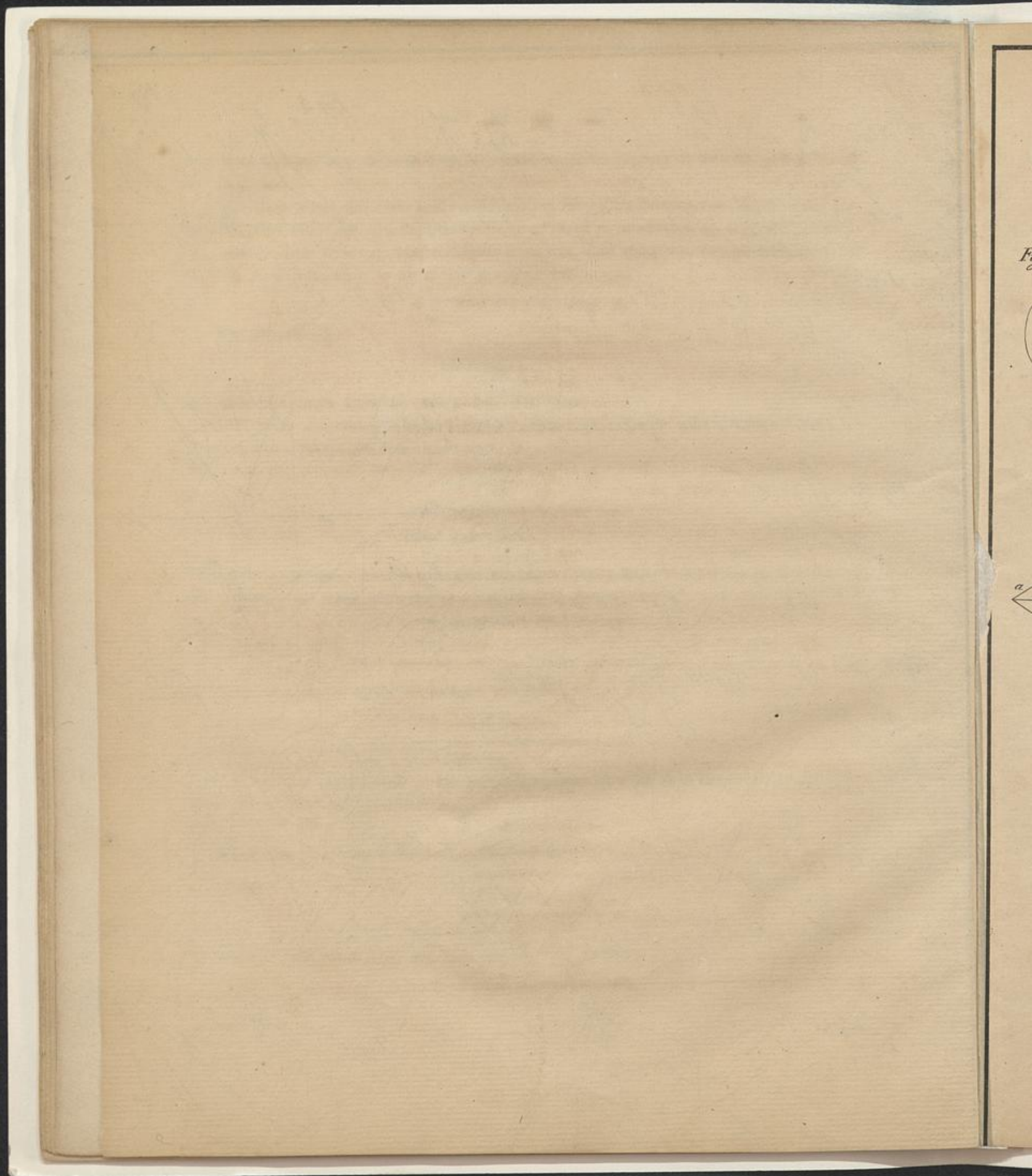
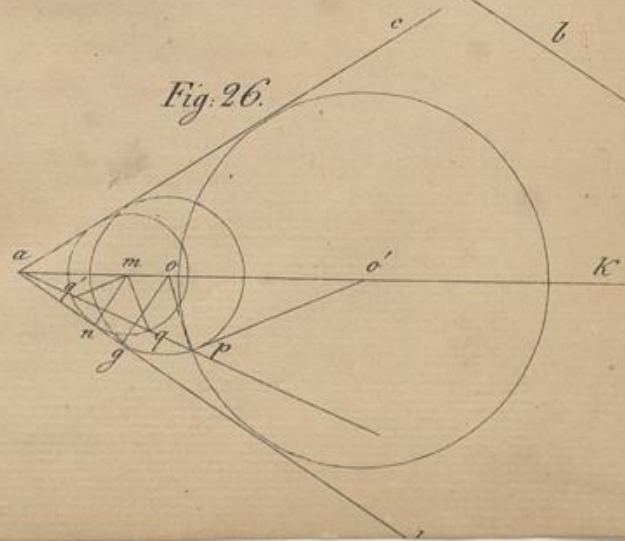
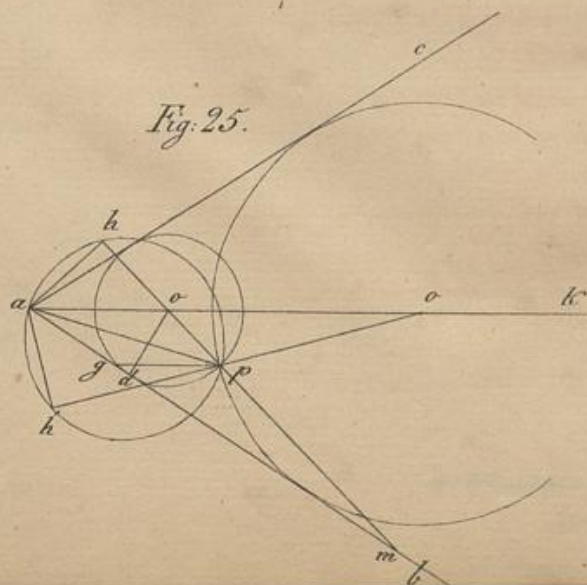
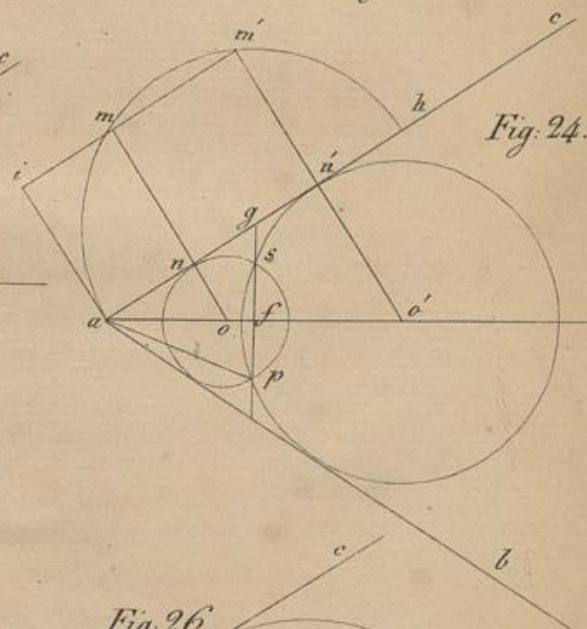
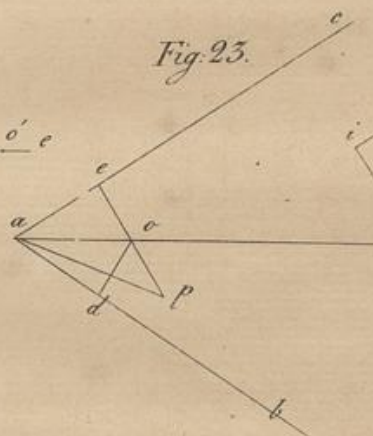
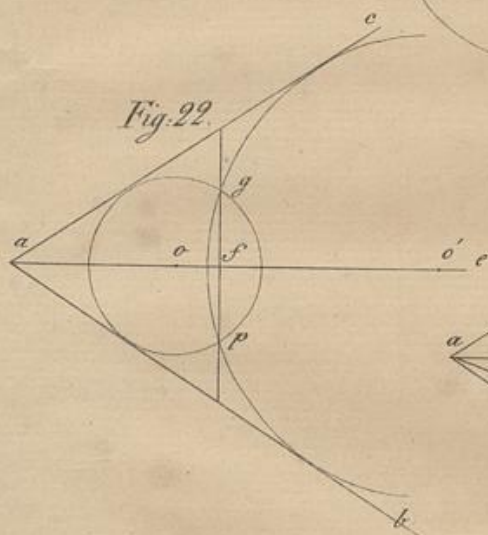
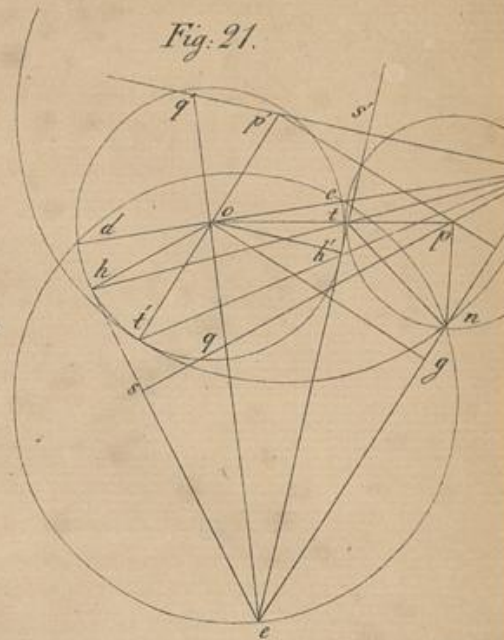
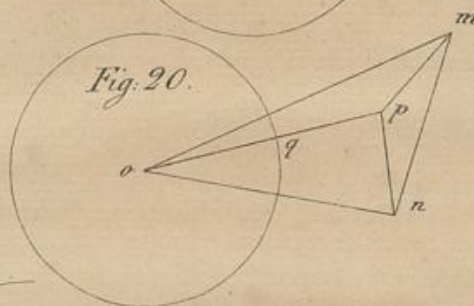
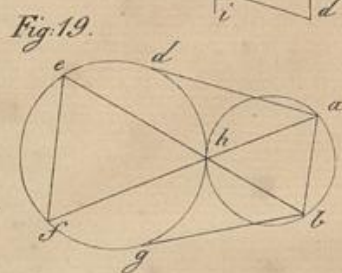
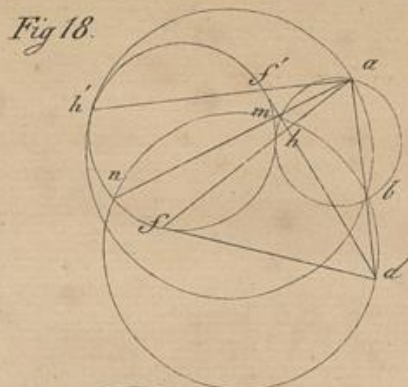
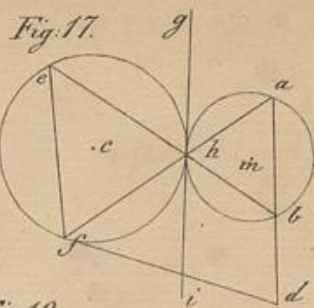
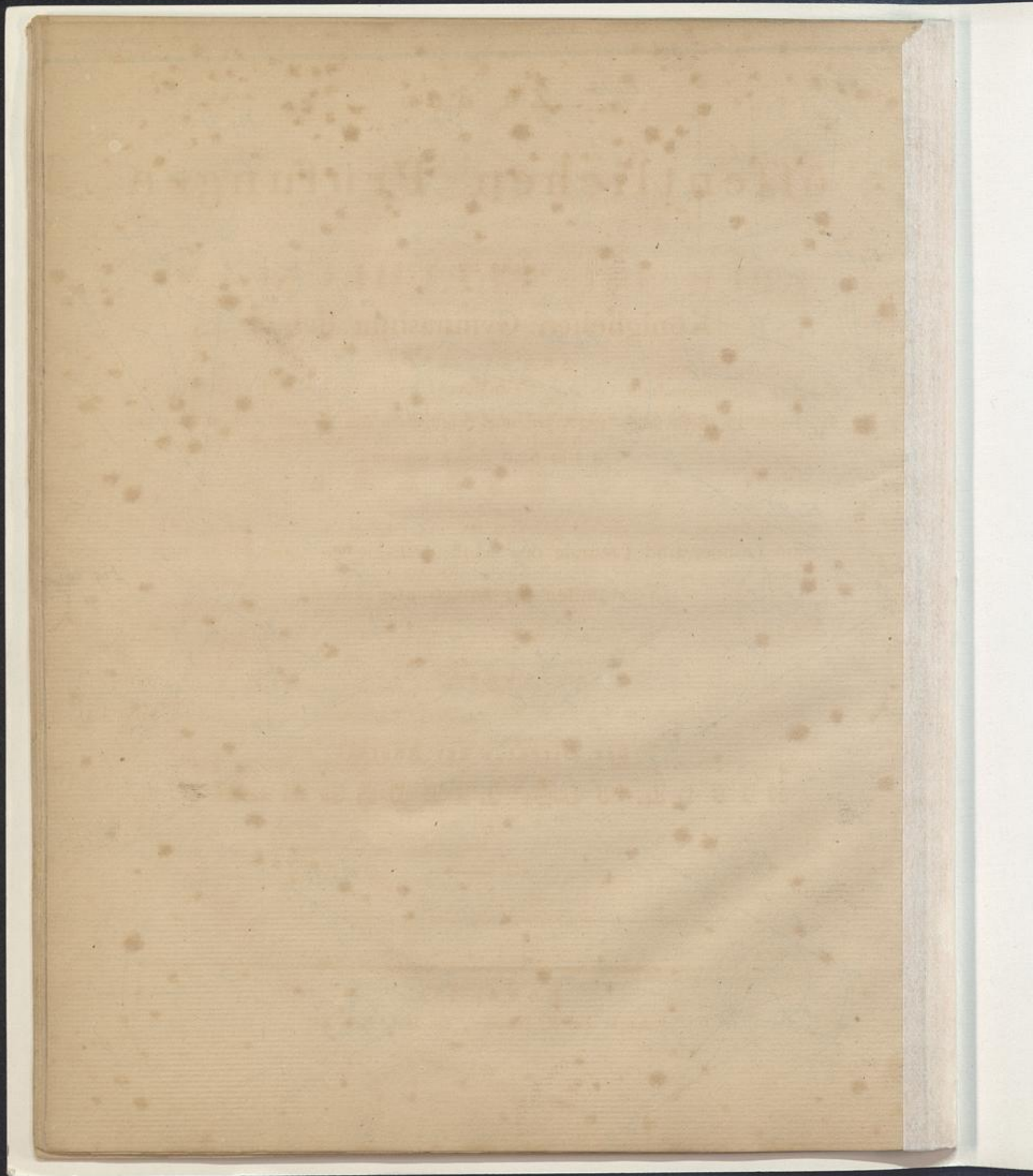


Fig. 16.









Beethoven-Gymnasium
Bonn
Lehrerbücherei

